Д.С. Звонарев, В.А. Баринов
Тюменский государственный университет, г.Тюмень

УДК 532.591

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Аннотация. Исследуются краевая задача для дифференциального уравнения описывающая распространение поверхностных волн в слое неоднородной жидкости. Качественными методами определяется критерий возникновения внутренних волн, определяется область физических параметров гидродинамической устойчивости этих волн.

Ключевые слова: поверхностные волны, неоднородная жидкость, критерий устойчивости.

Введение

Теория волновых движений стратифицированной жидкости - раздел современной гидродинамики, быстро развивающийся в последнее время, весьма интересный в теоретическом отношении и связанный с важнейшими приложениями в технике (гидротехнике, судостроении, мореплавании, энергетике) и в геофизике, океанологии, метеорологии, гидрологии, охране окружающей среды. Теории внутренних волн посвящено достаточно много работ. Среди которых необходимо отметить книги [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. В настоящее время большинство прикладных задач, посвященных генерации внутренних волн, решены в линейной постановке, т.е. в предположении, что амплитуда волновых движений мала по сравнению с длиной волны. Относительная простота решения линейных уравнений по сравнению с полной нелинейной задачей позволяет в полной мере применить к их решению современный математический аппарат и возможности вычислительной техники. Однако, даже в линейной постановке многие задачи в настоящее время не решены. В частности, отсутствует критерий возникновения внутренних волн в слое жидкости, по свободной поверхности которой бегут волны. Решению этой проблемы посвящена данная работа.

Математическая модель

Рассмотрим слой идеальной неоднородной жидкости ограниченной сверху свободной поверхностью $z = \xi(t, x, y)$ и снизу горизонтальным дном $z = -l$. Система координат выбрана так, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, ось z противополежено направлена вектору сил тяжести $\bar{g}$. Положим, что в состоянии покоя жидкость непрерывно стратифицирована, т.е. плотность непрерывная функция координаты z. Тогда из уравнения гидростатики следует, что статические давление $P_0(z)$ и плотность $\rho_0(z)$ связаны соотношением: $\frac{dP_0}{dz} = -g\rho_0$. Будем рассматривать случай устойчивой экспоненциальной стратификации:

$$\rho_0 = Re^{-a(z+l)} = re^{-az}, a = \frac{1}{l}\ln\frac{R}{r} \tag{1.1}$$

где $r = \rho_0(0), R = \rho_0(-l), r \le R$, a – показатель стратификации. Пусть по свободной поверхности в направлении оси Ox распространяется волна длины λ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число) с фазовой скоростью c (частотой $\omega = ck$). Волновое движение жидкости происходит в плоскости xOz со скоростью $\bar{u} = (u, 0, v)$. При этом возникают волновые возмущения гидростатического давления и плотности. Тогда общие давление и плотность можно представить в виде:

$$P = -g\int_z^0 \rho_0 dz + p$$

$$P = P_a + P_0 + p, \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} = \rho_0(1 + \mu),$$

Где p – волновое возмущение давления (динамическое давление), P_a – атмосферное давление, ρ и μ – размерное и безразмерное возмущения плотности соответственно. Введем безразмерные переменные и величины:

$$t' = \omega t, x' = kx, z' = kz, \xi' = k\xi, l' = kl,$$

$$\bar{u} = c\bar{u}', P - (P_a + P_0) = p = Rc^2 p', a = ka',$$

$$\rho_0 = R\rho_0{}', r = Rr', \rho_0 = e^{-a'(z'+l')}, \frac{1}{\rho_0'}\frac{\partial\rho_0'}{\partial z'} = -a',$$

$$\omega_0^2 = gk, c_0^2 = \frac{g}{k}, \alpha = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{c}{c_0}, N^2 = -g\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial z} = a'\omega_0,$$

Где c_0 и ω_0 – фазовая скорость и частота гравитационной волны на бесконечно глубоком слое соответственно, N^2 – частота Вяйсяля-Брента. Ниже частная производная будет обозначаться соответствующим нижним индексом (например, $\frac{\partial\rho_0}{\partial z} = \rho_{0z}$). Штрихи у безразмерных величин в дальнейшем опускаются. Линейная система уравнений для волновых возмущений в безразмерном виде запишется так:

$$u_x + v_z = 0, \mu_t = av,$$
$$p_x = -\rho_0 u_t, p_z = -\rho_0(v_t + \frac{\mu}{\alpha^2}), \quad (1.2)$$
$$u_x + v_z = 0, \mu_t = av, \nabla p = -\rho_0(u_t - \frac{\mu}{\alpha^2}e_z)$$

Где e_z – единичный вектор оси z. Действуя оператором rot на уравнение движения, получим линеаризованное уравнение Гельмгольца для определения вихревого поля:

$$\Omega_t = -(au_t + \frac{\mu_t}{\alpha^2}),$$
$$\mathrm{rot}u = \Omega e_y, \Omega = u_z - v_x. \quad (1.3)$$

Полагая ξ – малой величиной, граничные условия (кинематическое и динамическое) линеаризацией сводятся со свободной поверхности $z = \xi(t,x)$ на $z = 0$. Линейные граничные условия в обезразмереном виде:

$$\xi_t = v, p = \frac{r}{R\alpha^2}\xi, z = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того на дне должно быть выполнено условие непротекания:

$$v = 0, z = -l \quad (1.5)$$

Таким образом, линейную модель волнового движения экспоненциально стратифицированной жидкости составляет краевая задача (1.2)-(1.5) для определения неизвестных величин: u, p, μ, ξ.

Решение задачи (1.2)-(1.5) будем находить в виде прогрессивных волн установившегося вида. Для этого все искомые величины представим в виде:

$$f(t,x,z) = F_1(z)\cos\bar{x} + F_2(z)\sin\bar{x}, \bar{x} = x - t. \tag{1.6}$$

При этом определении неизвестной $f(t,x,z)$ сводится к задаче нахождения соответствующих амплитуд. Обозначим амплитуды искомых величин $v, u, \Omega, p, \mu, \xi$ соответственно $V_i, U_i, \Omega_i, P_i, M_i, K_i$, где $i = 1,2$. При подстановке неизвестных функций в виде (1.6) в уравнения (1.2)-(1.5), получим систему обыкновенных уравнений, из которых следует:

$$\begin{gathered}
M_1 = aV_2, M_2 = -aV_1; \\
U_1 = V_2', U_2 = -V_1'; \\
P_1 = \rho_0 V_2', P_2 = -\rho_0 V_1'; \\
P_1' = \frac{\rho_0}{\alpha^2}(\alpha^2 - a)V_2, P_2' = \frac{\rho_0}{\alpha^2}(\alpha^2 - a)V_1; \\
K_1 = V_2(0), K_2 = V_1(0); \\
-\Omega_1 = V_2'' - V_2 = a\left(V_2' - \frac{1}{\alpha^2}V_2\right); \\
\Omega_2 = V_1'' - V_1 = a\left(V_1' - \frac{1}{\alpha^2}V_1\right);
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Для неизвестных амплитуд V_i получаем одинаковые краевые задачи. Следовательно, они могут отличаться только постоянным множителем, т.е. $V_i = A_i V, A_i = \text{const}$. Получим:

$$A_1 = A\sin\theta, A_2 = A\cos\theta, A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \theta = \text{arctg}(\frac{A_1}{A_2}),$$

Где A и θ – начальная амплитуда, и фаза соответственно. Для общей амплитуды краевая задача имеет вид:

$$V'' - aV' - \left(1 - \frac{a}{\alpha^2}\right)V = 0, \tag{1.8}$$

$$V' - \frac{1}{\alpha^2}V = 0, y = 0,$$

$$V = 0, y = -l.$$

Используя представление (1.6) и равенства (1.7) можно выписать выражения для неизвестных функций через амплитуду $V(z)$:

$$v = AV(z)\sin\chi, u = AV'(z)\cos\chi,$$

$$p = \rho_0 AV'(z)\cos\chi, \mu = aAV\cos\chi \tag{1.9}$$

$$\xi = AV(0)\cos\chi, \Omega = -aA\left(V' - \frac{1}{\alpha^2}V\right)\cos\chi, \chi = \bar{x} + \theta.$$

Из выражения для вихря следует, что он обусловлен неоднородным распределением плотности. Из динамического условия (1.8) следует, что на свободной поверхности вихрь отсутствует.

Решение амплитудной задачи и его анализ

Избавимся в уравнении (1.8) от V', для этого используем замену $V = e^{\frac{az}{2}}W$. Тогда краевая задача примет вид:

$$W'' - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{\alpha^2} + 1\right)W = 0$$

$$W' + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)W = 0, z = 0 \tag{2.1}$$

$$W = 0, z = -l$$

Переобозначим параметры следующим образом:

$$n = \frac{a}{2}, \qquad b = \alpha$$

$$q = n^2 - \frac{2n}{b} + 1$$

В новых обозначениях (2.1) примет вид:

$$W'' - qW = 0$$

$$W' + \left(n - \frac{1}{b}\right)W = 0, z = 0 \tag{2.2}$$

$$W = 0, z = -l$$

Применим качественный анализ для определения типов решений (2.2). Представим первое уравнение (2.2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначив:

$$x = W, y = W'$$

Получим систему:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = qx \end{cases}$$

Неподвижной точкой системы будет точка (0, 0) для $q \neq 0$, исследуем ее тип. При $q > 0$ собственные значения являются действительными и разных знаков, значит (0, 0) точка седлового типа (рис. 1). При $q < 0$ собственные значения являются комплексно-сопряженными чисто мнимыми, значит (0, 0) точка типа центр (рис. 2).

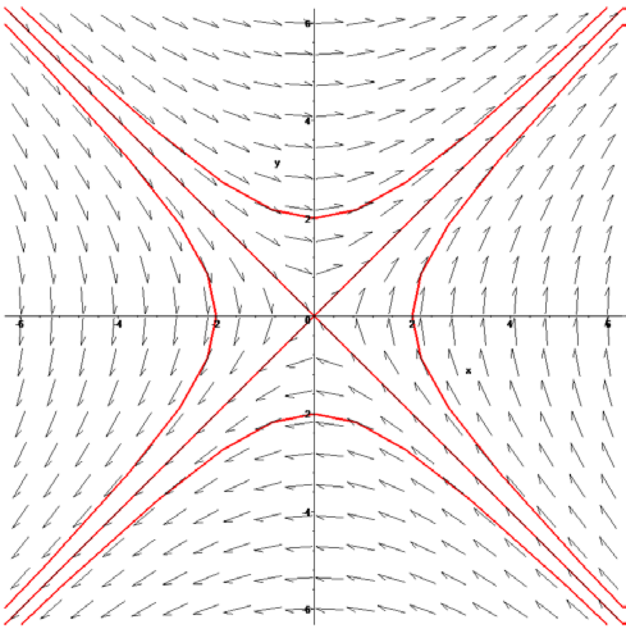

Рис. 1. Фазовый портрет системы при q=1 (q>0), неподвижная точка седлового типа.

Таким образом, можно видеть, что имеются два типа решений гиперболические (при $q > 0$) и эллиптические (при $q < 0$).

Сведем уравнение (2.2) к уравнению первого порядка, используя замену:

$u = (lnW)'$

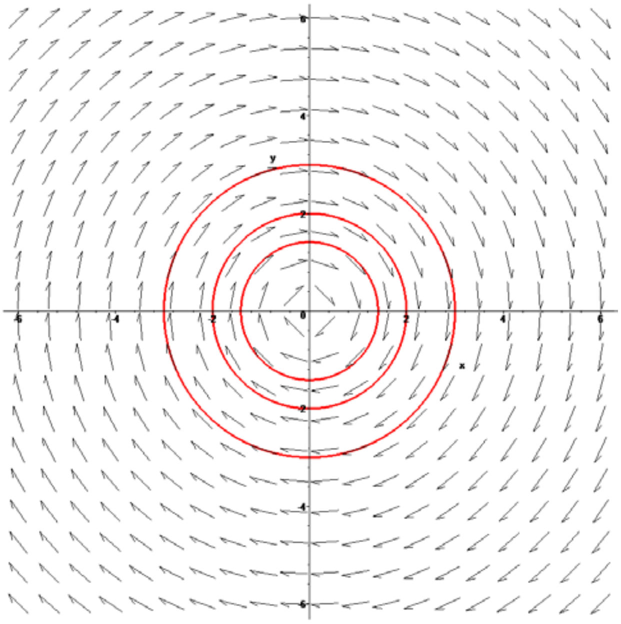

Рис. 2. Фазовый портрет системы при q=-1 (q<0), неподвижная точка типа центр.

Тогда приходим к краевой задаче вида:

$$\begin{gathered} u' = -u^2 + q \\ u = \frac{1}{b} - n, z = 0 \\ \int udz = -\infty, z = -l \end{gathered} \tag{2.3}$$

1) Для положительных q будем иметь уравнение:

$u' = -u^2 + |q|$

Решение, которого:

$u = \sqrt{|q|}cth(z\sqrt{|q|} + C)$

Из первого граничного условия получим:

$u(0) = \sqrt{|q|}cthC = \frac{1}{b} - n => C = arccth\frac{\frac{1}{b} - n}{\sqrt{|q|}}$

Из второго граничного условия получим:

$$\int \sqrt{|q|}cth(z\sqrt{|q|}+C)dz\Big|_{-l} = ln\left|sh(-l\sqrt{|q|}+C)\right| = -\infty$$

$$sh\left(-l\sqrt{|q|}+C\right) = 0 => C = l\sqrt{|q|}$$

Рис. 3 Область гиперболических волн, при l=1.

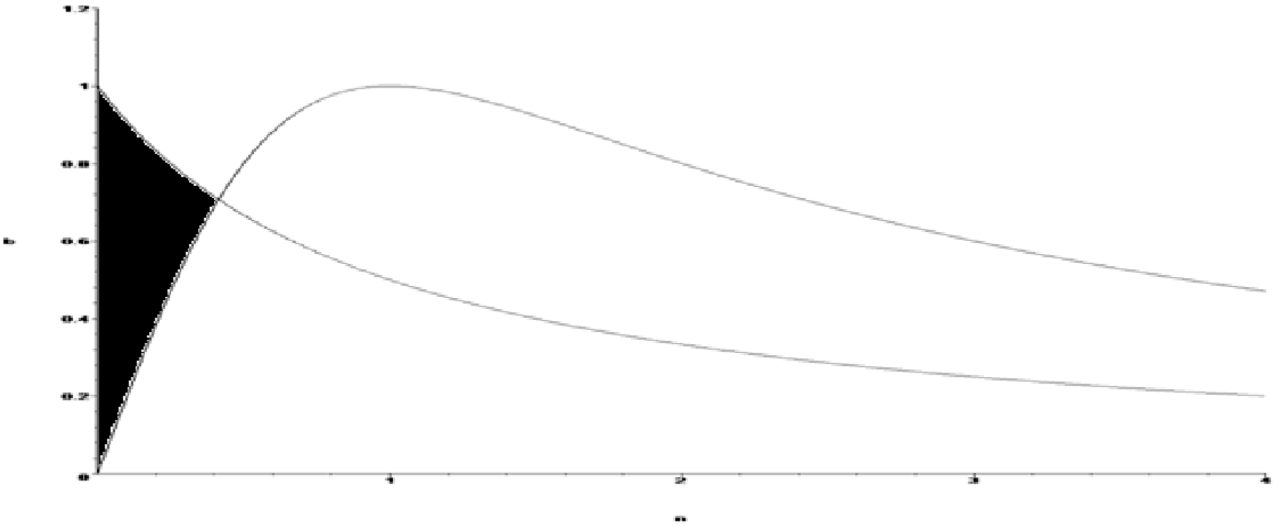

Рис. 3 Область гиперболических волн, при l=1.

Из условия равенства C получим дисперсионное соотношение:

$$\frac{\frac{1}{b}-n}{\sqrt{|q|}} = cth(l\sqrt{|q|}) \qquad (2.1.1)$$

Из (2.3) и свойств cth получим:

$$cth(l\sqrt{|q|}) > 0 => \frac{1}{b}-n > 0 \qquad (2.1.2)$$

$$cth(l\sqrt{|q|}) > 1 => b < 1 \qquad (2.1.3)$$

Заменив в (2.3) $l\sqrt{|q|} = x,\ l(\frac{1}{b}-n) = A$, получим уравнение $\frac{A}{x} = cthx$. Очевидно, что $cthx > \frac{A}{x}$ при $x \to \infty$. При этом $\lim_{x\to+0}\frac{xcthx}{A} = \frac{1}{A}$. Таким образом, (2.3) имеет решение тогда и только тогда, когда A>1 т.е.:

$$l(\frac{1}{b}-n) > 1 \qquad (2.1.4)$$

Область гиперболических волн заключена между кривыми:

$$q=0,\ l(\tfrac{1}{b}-n)=1 \qquad (2.1.5)$$

при q>0 (рис. 3). Параметры изменяются в пределах $b \in (0;1),\ n \in (0;-\frac{1}{l}+\sqrt{\frac{1}{l^2}+1})$.

2) Для q равного нулю:

$$n^2-\frac{2n}{b}+1=0 \qquad (2.2.1)$$

будем иметь уравнение:

$$u' = -u^2$$

Решение, которого:

$$u=\frac{1}{z+C}$$

Из первого граничного условия:

$$u(0)=\frac{1}{C}=n-\frac{1}{b}$$

Из второго граничного условия:

$$\int \frac{1}{z+C}dz\Big|_{-l} = ln|-l+C)| = -\infty$$

$$C=l$$

Из условия равенства C получим дисперсионное соотношение:

$$n-\frac{1}{b}=l \qquad (2.2.2)$$

Разрешая (2.2.1) и (2.2.2), как систему уравнений относительно b и n, получим:

$$n=l+\sqrt{l^2-1} \qquad (2.2.3)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{l^2 - 1}} \tag{2.2.4}$$

Учитывая, что b<1, получим условие:

$$l > \sqrt{2} \tag{2.2.5}$$

3) Для отрицательных q будем иметь уравнение:

$u' = -u^2 - |q|$

Решение, которого:

$u = \sqrt{|q|}ctg(z\sqrt{|q|} + C)$

Из первого граничного условия получим:

$$u(0) = \sqrt{|q|}ctgC = \frac{1}{b} - n => C = arcctg\frac{\frac{1}{b} - n}{\sqrt{|q|}}$$

Из второго граничного условия получим:

$$\int \sqrt{|q|}ctg(z\sqrt{|q|} + C)dz\Big|_{-l} = ln\left|sin(-l\sqrt{|q|} + C)\right| = -\infty$$

$$sin\left(-l\sqrt{|q|} + C\right) = 0 => C = l\sqrt{|q|} + 2\pi\bar{k}, \bar{k} \in Z$$

Из условия равенства C получим дисперсионное соотношение:

$$\frac{\frac{1}{b} - n}{\sqrt{|q|}} = ctg(l\sqrt{|q|}) \tag{2.3.1}$$

1. Пусть:

$$\frac{1}{b} - n > 0 \tag{2.4.1}$$

Тогда:

$$ctg(l\sqrt{|q|}) > 0 \tag{2.4.2}$$

Из этого следует, что:

$$\pi k < l\sqrt{|q|} < \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0,1,2\ldots$$

Тогда:

$$(\frac{\pi k}{l})^2 < |q| < (\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{l})^2$$

Так как q<0, то раскрывая модуль, получим:

$$-(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{l})^2 < q < -(\frac{\pi k}{l})^2 \tag{2.4.3}$$

Подставив в неравенство (2.4.3) q в виде $q = n^2 - \frac{2n}{b} + 1$ получим неравенство для b:

$$\frac{2n}{n^2+1+(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{l})^2} < b < \frac{2n}{n^2+1+(\frac{\pi k}{l})^2} \tag{2.4.4}$$

Подставив в неравенство (2.4.3) q в виде $q = (n-\frac{1}{b})^2 - (\frac{1}{b^2} - 1)$ получим неравенство для n:

$$\frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\pi k}{l})^2} < n < \frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{l})^2} \tag{2.4.5}$$

Значение числа k определяется выбором конкретного решения из спектра решений. Без потери общности можно положить k=0. Тогда неравенства (2.4.4) и (2.4.5) перепишутся в виде:

$$\frac{2n}{n^2+1+(\frac{\pi}{2l})^2} < b < \frac{2n}{n^2+1} \tag{2.4.6}$$

$$\frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1} < n < \frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\pi}{2l})^2} \tag{2.4.7}$$

Из требования неотрицательности подкоренных выражений в (2.4.7), получим условие:

$$b < \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{2l})^2}} \tag{2.4.8}$$

Неравенство (2.4.8) ограничивает максимальное значение b. Подставив (2.4.8) в (2.4.1), получим:

$$n < \sqrt{1 + (\frac{\pi}{2l})^2} \tag{2.4.9}$$

Неравенство (2.4.9) ограничивает максимальное значение n.

Заменив в (2.3.1) $l\sqrt{|q|} = x,\ \ l(\frac{1}{b} - n) = A$, получим уравнение $\frac{A}{x} = ctgx$. Очевидно, что $ctgx < \frac{A}{x}$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. При этом $\lim_{x \to +0} \frac{xctgx}{A} = \frac{1}{A}$. Таким образом (2.3.1) имеет решение тогда и только тогда, когда A<1 т.е.:

$$l(\frac{1}{b} - n) < 1 \tag{2.4.10}$$

Из (3.4.10) и (3.4.8) получим ограничение на минимальное значение n:

$$n > \sqrt{1 + (\frac{\pi}{2l})^2} - \frac{1}{l} \tag{2.4.11}$$

Из (3.4.10), (3.4.6) и (3.4.1) получим ограничение на минимальное значение b:

$$b > \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l} + 1 + (\frac{\pi}{2l})^2}} \tag{2.4.12}$$

В этом случае область тригонометрических волн заключена между кривыми:

$$b = \frac{2n}{n^2 + 1 + (\frac{\pi}{2l})^2},\ l(\frac{1}{b} - n) = 1,\ b = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{2l})^2}} \tag{2.4.13}$$

(рис. 4).

2. Пусть:

$$\frac{1}{b} - n < 0 \tag{2.5.1}$$

Тогда:

$$ctg(l\sqrt{|q|}) < 0$$

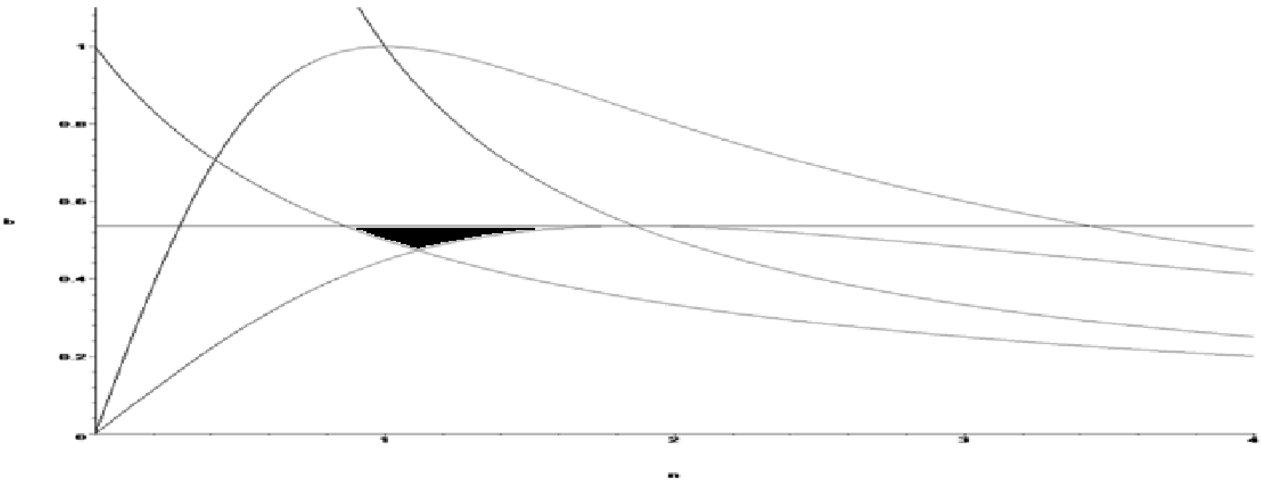

Рис. 4 Область тригонометрических волн, при l=1.

Из этого следует, что:

$$\frac{\pi}{2} + \pi k < l\sqrt{|q|} < \pi + \pi k, k = 0,1,2 \dots$$

Тогда:

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l}\right)^2 < |q| < \left(\frac{\pi + \pi k}{l}\right)^2$$

Так как q<0, то раскрывая модуль получим:

$$-\left(\frac{\pi + \pi k}{l}\right)^2 < q < -\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l}\right)^2 \tag{2.5.3}$$

Подставив в неравенство (2.5.3) q в виде $q = n^2 - \frac{2n}{b} + 1$ получим неравенство для b:

$$\frac{2n}{n^2 + 1 + (\frac{\pi + \pi k}{l})^2} < b < \frac{2n}{n^2 + 1 + (\frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l})^2} \qquad (2.5.4)$$

Подставив в неравенство (2.5.3) q в виде $q = (n - \frac{1}{b})^2 - (\frac{1}{b^2} - 1)$ получим неравенство для n:

$$\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\pi + \pi k}{l})^2} < n < \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{l})^2} \qquad (2.5.5)$$

Значение числа k определяется выбором конкретного решения из спектра решений. Без потери общности можно положить k=0. Тогда неравенства (2.5.4) и (2.5.5) перепишутся в виде:

$$\frac{2n}{n^2 + 1 + (\frac{\pi}{l})^2} < b < \frac{2n}{n^2 + 1 + (\frac{\pi}{2l})^2} \qquad (2.5.6)$$

$$\frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\pi}{l})^2} < n < \frac{1}{b} - \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1 - (\frac{\pi}{2l})^2} \qquad (2.5.7)$$

Из требования неотрицательности подкоренных выражений в (2.5.7), получим условие:

$$b < \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{l})^2}} \qquad (2.5.8)$$

Неравенство (2.5.8) ограничивает максимальное значение b. Подставив (2.5.8) в (2.5.1), получим:

$$n > \sqrt{1 + (\frac{\pi}{l})^2} \qquad (2.5.9)$$

Неравенство (2.5.9) ограничивает минимальное значение n.

В этом случае область тригонометрических волн заключена между кривыми (рис. 5):

$$b = \frac{2n}{n^2+1+(\frac{\pi}{2l})^2},\ b = \frac{2n}{n^2+1+(\frac{\pi}{l})^2},\ b = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\pi}{l})^2}} \qquad (2.5.10)$$

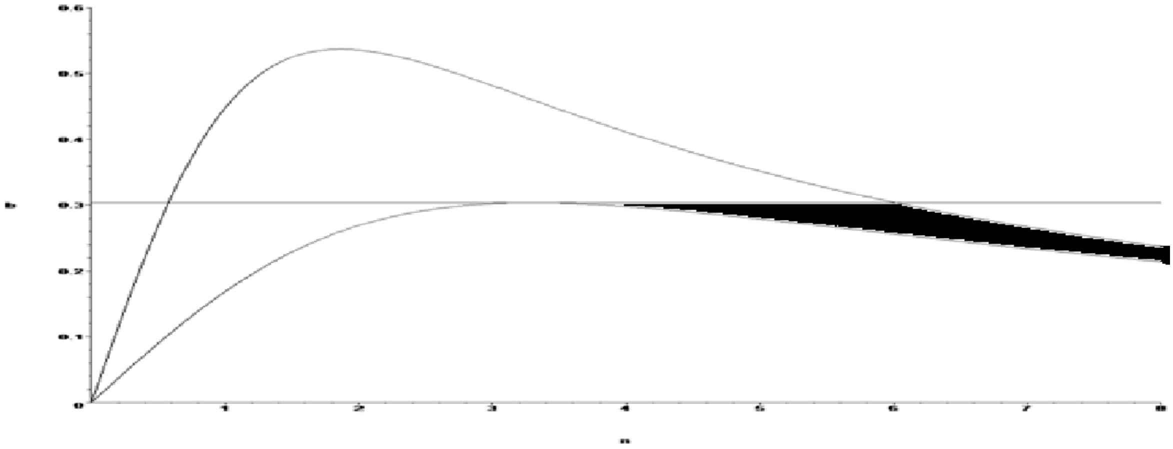

Рис. 5 Область тригонометрических волн, при l=1.

Таким образом, область существования внутренних волн определена выражениями (2.4.13) и (2.5.10). При других значениях параметров (n,b) внутренние волны не возникают, волновое движение качественно совпадает с волновым движением однородной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996.
2. Булатов В.В. Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука 2005. 195с.
3. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ 1988. 176с.
4. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 288с.

5. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидромет, 1981. 384 с.
6. Овсянников Л.В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
7. Перегудин С.И.: Волновые движения в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 288с.
8. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 288с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. М.: Физматгиз. 1963. 584с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Теоретическая физика т.6. М.: Наука. 1986. 736с.
11. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука 1977. 816с.